Fonctions gamma et beta d'Euler

On rappelle que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ existe et vaut $\sqrt{\pi}/2$.

Partie I - Etude de la fonction gamma d'Euler

Pour tout $x>0$, on pose $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie.

2.a Former une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ pour tout $x>0$.

2.b Calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

2.c Calculer $\Gamma(1/2)$, puis exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ à l'aide de nombres factoriels.

3. On admet la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que :
$\Gamma'(x)=\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\Gamma''(x)=\int_0^{+\infty} \ln(t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

3.a Justifier que les deux intégrales précédentes sont bien définies.

3.b Etudier les variations de Γ, on pourra utiliser, outre le signe Γ'', la relation entre $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$ pour établir que Γ' s'annule en un unique $\alpha\in]1,2[$.

4.a En exploitant la relation du 2.a donner un équivalent simple à Γ en 0^+.

4.b Etudier la limite de $\Gamma(x)$ puis celle de $\Gamma(x)/x$ quand $x\to+\infty$.
Préciser la nature de la branche infinie de Γ en $+\infty$

5. Donner l'allure de Γ. On donne $\alpha=1,46$ et $\Gamma(\alpha)=0,89$ à 10^{-2} près.

Partie II - Etude de la fonction beta d'Euler

Soit a et b dans $\mathbb{R}^+*$. On pose $\beta(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t$.

1.a Montrer que cette intégrale est bien définie.

1.b Comparer $\beta(a,b)$ et $\beta(b,a)$.

1.c Etablir que $\beta(a,b)=\beta(a+1,b)+\beta(a,b+1)$.

1.d Calculer $\beta(1/2,1/2)$ et $\beta(1,n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

2.a Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $\beta(a+1,b)=\frac{a}{a+b}\beta(a,b)$.

2.b Calculer $\beta(n,p)$ pour tout $n,p\in\mathbb{N}^*$ en exprimant le résultat à l'aide de factoriels.

2.c Calculer $\beta\left(n+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}\right)$ pour tout $n,p\in\mathbb{N}$ en exprimant le résultat à l'aide de factoriels.

3. Pour $a,b\in\mathbb{R}^+*$, on pose $\alpha(a,b)=\int_0^{\pi/2}\sin^{2a-1}\theta.\cos^{2b-1}\theta\mathrm{d}\theta$.

3.a Montrer que l'intégrale $\alpha(a,b)$ est bien définie.

3.b Former une relation entre $\alpha(a,b)$ et $\beta(a,b)$.

4.a Soit $R>0$. On pose $J_R(a)=\int_0^R \mathrm{e}^{-x^2}x^{2a-1}\mathrm{d}x$.
En utilisant des intégrales doubles sur des parties bien choisies de $\mathbb{R}^2$ établir :
$\forall a,b\geq\frac{1}{2},\frac{1}{2}J_R(a+b)\beta(a,b)\leq J_R(a)J_R(b)\leq\frac{1}{2}J_{R\sqrt{2}}(a+b)\beta(a,b)$.

4.b En déduire une relation entre $\Gamma(a),\Gamma(b),\Gamma(a+b)$ et $\beta(a,b)$.

4.c Prolonger cette égalité à tout couple $(a,b)\in(\mathbb{R}^+*)^2$.